Colles de Maths - semaine 3
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Formules d'addition, de duplication, de factorisation et de linéarisation
- Formule de Moivre
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \bar{z}$.

Exercice 2 Déterminer la partie réelle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{15}$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (i-2)z^2 + (3-3i)z + 2i - 2 = 0$.
Indication : Commencer par chercher si l'équation admet une solution réelle.

Exercice 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 5 Déterminer les solutions complexes de $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$.

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.
Montrer que les solutions de l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \alpha$ sont toutes réelles si et seulement si $\alpha \in \mathbb{U}$.

Exercice 7 (un calcul très classique) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le n^e noyau de Dirichlet par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Montrer que, si x n'est pas un multiple entier de 2π,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Qu'en est-il si x est un multiple entier de 2π ?

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \neq 0\,[3]$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{3k}) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k).$$

Indication : Montrer que les termes du produit sont les mêmes (à changement de l'ordre près).
En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 + 2\cos\frac{2k\pi}{n})$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(\frac{n}{2}-k\right)t}\right)^2 = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}.$$

1. Montrer que, si $x_0, ..., x_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{p+q=k} x_p\, x_q$$

2. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Montrer que l'ensemble $\{(p,q) \in [\![0,n]\!],\, p+q=k\}$ est de cardinal :
   — $k+1$ si $k \leq n$;
   — $2n-k+1$ si $k \geq n+1$.
3. En déduire le résultat.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$.
2. Soit $a_0, a_1, ...a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on définit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k$ et $M = \max\{|P(z)|,\, z \in \mathbb{U}_n\}$.

   Montrer que, pour tout k, $|a_k| \leq M$.

Exercice 11 (polynômes de Tchebychev - à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On cherche à définir un polynôme réel T_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer l'existence d'un tel polynôme et en donner une formule explicite sous forme de somme.
   Indication : utiliser la formule de Moivre.
2. En utilisant le fait qu'un polynôme admettant une infinité de racines est nul, montrer que le polynôme obtenu est le seul qui convient. On le note T_n et on l'appelle n^e polynôme de Tchebychev.
3. Quels sont le degré et le coefficient dominant de T_n ?
4. Déterminer les racines de T_n.